НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ.

ЛЕКЦИЯ 15

8.6 Передаточные функции дискретных систем

В предыдущей лекции мы рассмотрели z-преобразование дискретных сигналов. Теперь мы выясним, как эти преобразованные сигналы проходят через линейные динамические системы. В случае непрерывных сигналов подобное прохождение (преобразование) представлено передаточной функцией. Для дискретных систем также широко используются передаточные функции, но уже другого вида. Рассмотрим этот вопрос.

Предположим, что на входе и выходе линейной непрерывной системы с передаточной функцией W (s) и импульсной переходной функцией *w (t)* установлены квантователи (Рисунок 8.5). Напомним, что импульсная переходная функция *w (t)* – это изменение выходного сигнала системы во времени при подаче на ее вход единичного импульса в виде δ-функции.

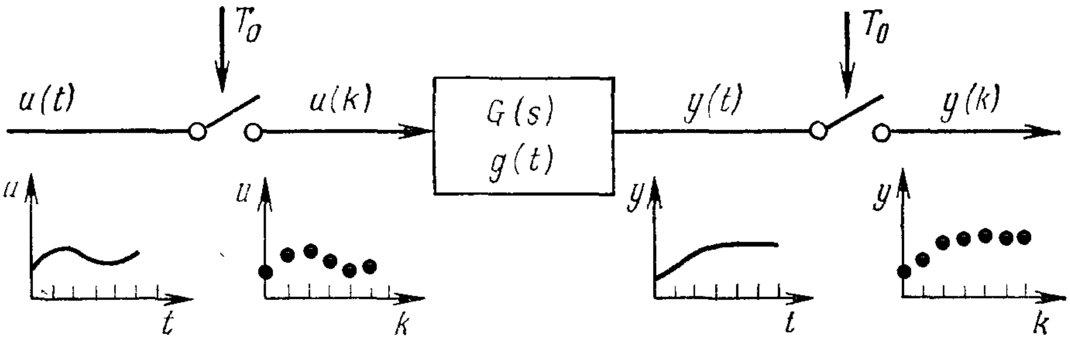

Рисунок 8.5 – Линейная система с импульсным входом и выходом. Здесь обозначения несколько иные, но их смысл ясен из рисунка и текста.

Сигнал на входе, согласно (8.11), может быть записан в виде (индекс *n* для удобства заменен на *k*)

$$u^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)\cdot\delta(t-kT)\,. \tag{8.11}$$

Тогда непрерывный выходной сигнал может быть записан в виде суммы свертки

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)\cdot w(t-kT)\,. \tag{8.19}$$

Считая, что квантователи на входе и выходе системы работают синхронно, для выходного дискретного сигнала можно записать

$$y(nT) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)\cdot w(nT-kT) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)\cdot w((n-k)T)\,. \tag{8.20}$$

Выполним преобразование по Лапласу выходного дискретного сигнала

$$y^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT)e^{-nTs} = \sum_{n=0}^{\infty}\ \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)\cdot w((n-k)T)e^{-nTs}\,. \tag{8.21}$$

Подставим в (8.21) $q = n - k$

$$y^*(s)=\sum_{q=-k}^{\infty}\ \sum_{k=0}^{\infty}u(kT)\cdot w(qT)e^{-qTs}e^{-kTs}=\sum_{q=0}^{\infty}w(qT)e^{-qTs}\sum_{k=0}^{\infty}u(kT)\cdot e^{-kTs}. \qquad (8.22)$$

Последняя сумма в (8.22) есть преобразование по Лапласу входного сигнала. Тогда из (8.22)

$$y^*(s)=\sum_{q=0}^{\infty}w(qT)e^{-qTs}u^*(s)=W^*(s)\cdot u^*(s). \qquad (8.23)$$

где $W^*(s)$ –передаточная функция звена дискретизированной системы. Из (8.23)

$$W^*(s)=\frac{y^*(s)}{u^*(s)}=\sum_{q=0}^{\infty}w(qT)e^{-qTs}. \qquad (8.24)$$

Переходя, согласно (8.15), к переменной z, получаем

$$W(z)=\frac{y(z)}{u(z)}=\sum_{q=0}^{\infty}w(qT)z^{-q}=L_D\{w(q)\}, \qquad (8.25)$$

где $W(z)$ – дискретная передаточная функция

Таким образом, *дискретная передаточная функция (z – передаточная функция) звена W(z) есть отношение z – преобразований (L_D-преобразований) выходного сигнала к входному*. Дискретная передаточная функция широко используется для анализа и синтеза дискретных систем управления. Также. как для обычных передаточных функций, составлены таблицы z – передаточных функций для типовых звеньев. Эти передаточные функции являются отношением полиномов от переменной z.

Если имеется разностное уравнение дискретной системы типа (8.9), то дискретная передаточная функция строится достаточно просто. Запишем разностное уравнение для системы на рисунке 8.5

$$y(k)+a_1y(k-1)+...+a_nu(k-n)=b_0u(k)+b_1u(k-1)+...+b_me(k-m). \qquad (8.26)$$

Учитывая, что запаздыванию на k тактов соответствует в области изображений оператор z^{-k}, (8.26) можно записать в виде

$$y(z)+a_1y(z)z^{-1}+...+a_nu(z)z^{-n}=b_0u(z)+b_1u(z)z^{-1}+...+b_me(z)z^{-m}. \qquad (8.27)$$

Тогда дискретная передаточная функция будет иметь вид

$$W(z)=\frac{y(z^{-1})}{u(z^{-1})}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+...+b_mz^{-m}}{1+a_1z^{-1}+...+a_nz^{-n}}. \qquad (8.28)$$

Разделим числитель и знаменатель передаточной функции (8.28) на z^n, в итоге получим

$$.\ W(z)=\frac{y(z)}{u(z)}=\frac{b_0z^n+b_1z^{n-1}+...+b_mz^{(n-m)}}{z^n+a_1z^{n-1}+...+a_n}. \qquad (8.29)$$

Используются обе формы передаточных функций.

Пример 8.2. Рассмотрим пример, когда непрерывная система представлена апериодическим звеном с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{K}{1+Ts} = \frac{K_1}{a+s}, \quad (8.30)$$

где $a = 1/T$; $K_1 = K/T$.

Это звено имеет импульсную переходную функцию

$$w(t) = K_1 e^{-at}, \quad (8.31)$$

тогда в дискретные моменты времени

$$w(kT) = K_1 e^{-akT}. \quad (8.32)$$

Используя (8.25), получаем (используется формула для суммы геометрической прогрессии)

$$W(z) = \sum_{q=0}^{\infty} K_1 e^{-aqT} z^{-q} = K_1 \sum_{q=0}^{\infty} (e^{aT} z)^{-q} = K_1 (1 + (e^{aT} z)^{-1} + (e^{aT} z)^{-2} + ...) =$$
$$= \frac{K_1}{1-(e^{aT} z)^{-1}} = \frac{K_1}{1-e^{-aT} z^{-1}} = \frac{b_0}{1-a_1 z^{-1}} = \frac{b_0 z}{z-a_1}, \quad (8.33)$$

где $a_1 = e^{-aT}$; $b_0 = K_1$.

Мы получили передаточные функции типа (8.28), (8.29), как отношение полиномов от переменной z.

8.6 Полюса передаточной функции и устойчивость дискретных систем

Устойчивость линейной дискретной системы, так же, как и непрерывной, является внутренним свойством этой системы. Эта устойчивость характеризуется собственными движениями системы, то есть, когда отсутствуют внешние воздействия, но начальные условия ненулевые. Известно, что устойчивость непрерывных систем зависит от полюсов передаточной функции. Напомним, что полюсом непрерывной передаточной функции называется значение s, которое обращает ее знаменатель в нуль. Для дискретного полюса определение такое же.

То есть полюсом дискретной передаточной функции, называется значение z, которое обращает знаменатель этой функции в нуль.

Для уяснения того, как должны располагаться полюса дискретной передаточной функции устойчивой системы, рассмотрим пример. Рассмотрим дискретную систему из примера 8.2. Там передаточная функция имеет вид

$$W(z) = \frac{b_0 z}{z-a_1} = \frac{b_0}{1-a_1 z^{-1}} \quad (8.34)$$

Полюс этой передаточной функции

$$z_1 = a_1. \quad (8.35)$$

Учитывая то, что z^{-1} во области времени соответствует запаздыванию на один такт, разностное уравнение, соответствующее передаточной функции (8.34), имеет вид

$$y(k) - a_1 y(k-1) = b_0 u(k). \quad (8.36)$$

Уравнение системы (8.36) для исследования устойчивости при отсутствии внешних воздействий записывается так

$$y(k) - a_1 y(k-1) = 0. \quad (8.37)$$

Теперь, используя (8.37), запишем последовательность выходных сигналов при возрастании k от единицы до произвольного значения

$$\begin{aligned} & y(1) = a_1 y(0) \\ & y(2) = a_1 y(1) = a_1^2 y(0) \\ & \ldots \\ & \ldots \\ & y(k) = a_1^k y(0) \end{aligned} \qquad (8.38)$$

Из (8.38) следует, что переходный процесс в системе стремится к нулю только при условии $|a_1| \prec 1$. Заметим, что при отрицательных значениях a_1 будет колебательный процесс, но при $|a_1| \prec 1$ он также будет стремится к нулю.

Мы рассмотрели устойчивость системы первого порядка. Для системы любого порядка соблюдается такая же закономерность. То есть для того, чтобы дискретная система была абсолютно устойчивой, необходимо, чтобы все полюса ее передаточной функции в виде (8.27) по абсолютному значению были меньше единицы. Иными словами корни характеристического уравнения знаменателя (8.29)

$$(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n) = 0 \qquad (8.39)$$

должны удовлетворять неравенству

$$|z_i| \prec 1 \text{ , } i=1, 2, \ldots, n \text{ .} \qquad (8.40)$$

Заметим, что полюса, как и для непрерывных систем, могут быть комплексными.

Поскольку известно, что для устойчивости непрерывной линейной системы все корни характеристического уравнения знаменателя должны находиться в левой полуплоскости корней, то можно считать, что при дискретизации этой системы левая полуплоскость корней непрерывной системы преобразуется в круг радиусом единица на плоскости корней дискретной системы.

8.7 Преобразование непрерывной передаточной функции в дискретную

При проектировании дискретных систем является естественным стремление использовать хорошо проработанные и апробированные методы анализа и синтеза непрерывных систем, связанные с передаточными функциями и частотными характеристиками. При исследовании устойчивости это критерии Рауса, Гурвица, Найквиста, Михайлова и другие, при синтезе корректирующих устройств это метод логарифмических частотных характеристик и другие методы.

Однако затруднением здесь является кардинальное отличие свойств непрерывных и дискретных передаточных функций. Например, областью устойчивости непрерывных систем является левая полуплоскость для корней характеристического уравнения передаточной функции, в то время как для дискретных этой областью служит круг диаметром единица. Хорошим решением применения непрерывных методов было бы преобразование дискретной системы в непрерывную с последующим применением этих методов. Однако такое преобразование в точном виде громоздко и трудно выполнимо (смотрите примеры 8.1, 8.2). Выход был найден в приближенных, но более простых преобразованиях.

Наибольшее применение имеет преобразование, основанное на приближенном соотношении

$$z = e^{sT} = \frac{e^{sT/2}}{e^{-sT/2}} \approx \frac{1 + sT/2}{1 - sT/2}. \tag{8.41}$$

Здесь каждая экспонента представлена первыми двумя слагаемыми ее разложения в степенной ряд. Это преобразование называется билинейное преобразование (в западной литературе – преобразование Тастина).

Таким образом, билинейное преобразование осуществляется подстановкой

$$z = \frac{2 + sT}{2 - sT} \tag{8.42}$$

или инверсной по отношению (8.42) подстановкой

$$s = \frac{2}{T} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}. \tag{8.43}$$

При билинейном преобразовании (8.42), также как и при точном преобразовании

$$z = e^{Ts} \tag{8.15}$$

происходит преобразование левой полуплоскости корней непрерывной системы внутрь окружности единичного радиуса плоскости корней дискретной системы, однако это преобразование выполнить несравненно проще. Однако за простоту нужно платить – из-за неточности выражения (8.38) исходное и преобразованное выражения удовлетворительно соответствуют друг другу только в области низких частот. С ростом частоты отличие растет. Тем не менее, поскольку системы управления работают в области низких частот, билинейное преобразование широко используется как для получения дискретной передаточной функции по известной непрерывной передаточной функции, так и для исследования устойчивости и качества регулирования дискретных систем.

Для получения дискретной передаточной функции по известной непрерывной передаточной функции используется подстановка (8.43).

Для исследования устойчивости и качества регулирования дискретных систем по известной дискретной передаточной функции методами непрерывных систем используется подстановка (8.42). При этом происходит обратное преобразование внутренней части окружности единичного радиуса плоскости корней дискретной системы в левую полуплоскость корней непрерывной системы.